Φυλλάδιο 5ο

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$f_X(x)=\begin{cases} a(1-x^2) & -1\leq x\leq 1 \\ & ,\ a>0 \\ 0 & ,\ \text{αλλού } (x<-1 \text{ ή } x>1) \end{cases}$$

α) $a=?$ $F_X=?$

β) $P(X>0)\to f_X$

~~$P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})\to F_X$~~

$P(X>-\frac{1}{2}\mid X<\frac{1}{2})=?$, $A=\{X>0\}$, $B=\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}$

ανεξάρτητα

γ) $E(X)=?$ $Var(X)=?$

ΛΥΣΗ

α) $$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx=\int_{-1}^{1}a(1-x^2)\,dx=a\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$$

$$=a\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=a\Big(1-\underbrace{\frac{1}{3}}_{2/3}+\underbrace{1-\frac{1}{3}}_{2/3}\Big)=a\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{4}}$$

$-\infty$ x -1 x 1 x $+\infty$

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\,dt=\begin{cases} 0 & ,\ x<-1 \\ \cancel{\int_{-\infty}^{-1}0}+\int_{-1}^{x}\frac{3}{4}(1-t^2)\,dt & ,\ -1\leq x<1 \\ \int_{-\infty}^{-1}0+\underbrace{\int_{-1}^{1}f_X(x)\,dx}_{1}+\cancel{\int_{1}^{x}0}=1 & ,\ x\geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-t^2)\,dt=\frac{3}{4}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x}=\frac{3}{4}\left(\frac{3x-x^3}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{-x^3+3x+2}{3}\right)=\boxed{\frac{-x^3+3x+2}{4}}=-\frac{x^3}{4}+\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}$$

Επαλήθευση $f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$

β) • $P(X>0) = \int_0^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 f_X(x)\,dx + \cancel{\int_1^{+\infty} 0\,dx}^{\,0}$

$= \frac{3}{4}\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$

• $P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8\cdot 2\cdot 2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{16} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{16} + \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1+28}{16}\right) = \cancel{\boxed{\frac{27}{32}}} = \frac{11}{16}$

• $P\left(X > -\frac{1}{2} \,\middle|\, X < \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X>-\frac{1}{2} \text{ κ' } X<\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)} = \frac{P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{11}{16}}{\ } = \boxed{\frac{22}{27}}$

$P\left(X<\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{1/2} f_X(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} 0\,dx}^{\,0} + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1/2}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1/2}$

$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + 1 - \frac{1}{3}\right] = \ldots$

• Τα A,B είναι ανεξάρτητα αν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap B) = P(X>0 \text{ και } -1/2 < X < 1/2) = P(0<X<1/2) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X(0)$

$= \boxed{\frac{11}{32}}$

$P(A) = P(X>0) = \frac{1}{2}$

$P(B) = P\left(-\frac{1}{2} < X < 1/2\right) = \frac{11}{16}$

$\}^{*} = \boxed{\frac{11}{32}}$

άρα ανεξάρτητα A,B.

γ) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = 0$

$Var(X) = E(X^2) - \cancel{(E(X))^2}^{\,0}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \dots$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

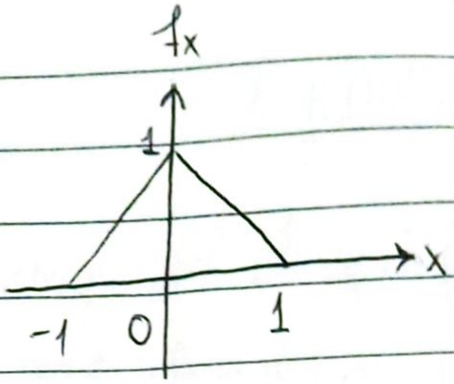
i) Ιδιότητες F_X:
- Αύξουσα
- Συνεχής από δεξιά
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

ii) $f_X(x) = ?$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 2\frac{x+1}{2} = x+1, & -1 < x < 0 \\ 1 - \frac{2x}{2} = 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-|x|, & -1 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$P\left(|X| < \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$



$P\left(0 < X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

iv) $E(X) = 0$

β) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$Y = X^3$

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y = g(x) = x^3$

Τιμές Y: $y = x^3$, $0 \leq x \leq 3 \rightarrow 0 < y < 27$

Η g είναι 1-1? Προφανώς $\left\langle \begin{array}{l} g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dx} g(x) = 3x^2 \geq 0 \quad x \in (0,3) \end{array} \right.$

Εύρεση g^{-1}, $x = g^{-1}(y) = y^{1/3}$, $0 \leq y \leq 27$

$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} y^{1/3} = \frac{1}{3} y^{-2/3} \neq 0$ και συνεχής $0 < y < 27$

Άρα, $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{9} \left(y^{1/3}\right)^2 \left| \frac{1}{3} y^{-2/3} \right| \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{27}$, $0 < y < 27$

$X \sim U(0,27)$

ΑΣΚΗΣΗ 3

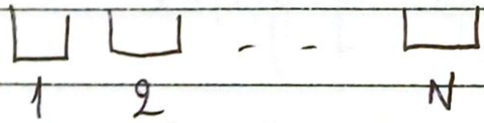
α) N μπάλες διακεκριμένες → σε γραμμή

$N(N-2)!$

i) $P\begin{pmatrix}\text{οι μπάλες 1 και N} \\ \text{η μία δίπλα στην} \\ \text{άλλη}\end{pmatrix} = \dfrac{2(N-1)!}{N!}$

ii) $P\begin{pmatrix}\text{οι μπάλες 1 και N} \\ \text{η μία στο ένα άκρο} \\ \text{και η άλλη στο άλλο}\end{pmatrix} = \dfrac{2(N-2)!}{N!}$

β) m (m>7)



(N>m)

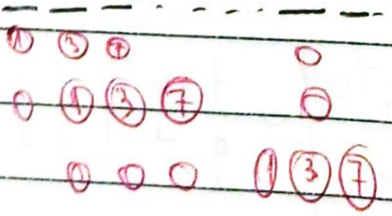
Στους τρόπους τοποθέτησης των m-μπαλών σε διαδοχικά κουτιά με τις 1,3,7 σε διαδοχ. κουτιά

Στους τρόπους μετακίνησης των m-άδων από το 1ο κουτί μέχρι το N-οστό κουτί

$P\begin{pmatrix}\text{όλες οι μπάλες σε διαφορετικά} \\ \text{κουτιά και επιπλέον οι μπάλες} \\ \text{1,3,7 να βρίσκονται με τη σειρά} \\ \text{αυτή σε διαδοχικά κουτιά}\end{pmatrix} = \dfrac{(m-2)!\,(N-m+1)}{N^m}$

N^m → κυψέλες πιθανότητα

1 2 3 . . . . m m+1 N ← κουτιά



γ) Διαδικασία επαναλαμβάνεται

i) Αν η διαδικασία επαναληφθεί 5 φορές → Πόσες φορές αναμένεται όλες οι μπάλες σε διαδοχικά κουτιά και οι 1,3,7 σε διαδοχικά κουτιά?

Έστω $E = \left\{ \begin{array}{l} \text{οι μπάλες σε διαδοχικά κουτιά} \\ \text{και οι } 1,3,7 \text{ σε } -''- \end{array} \right\}$

Έστω τ.μ X παριστά τον αριθμό των E στις 5 επαναλήψεις

Ζητώ $E(X) = ?$

$$X \sim B\left(n=5,\ p = P(E) \underset{m=8}{\overset{N=10}{=\!=}} 0{,}0000216\right)$$

$$E(X) = np = 0$$

ii) $P\left(\begin{array}{l} \text{επαναλαμβάνεται 6 φορές} \\ \text{μέχρι όπου για 2η φορά} \\ \text{οι μπάλες σε διαδοχ. κουτιά} \\ \text{και οι } 1,3,7 \text{ σε} -''- \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{l} \text{6 επαναλήψεις} \\ \text{μέχρι την 2η } E \end{array}\right) = P(Y=6)$

$= P_Y(6)$

<u>Αρνητική Διωνυμική</u>

Έστω τ.μ Y παριστά αριθμό επαναλήψεων (τοποθετούνται οι m-μπάλες σε N κουτιά) μέχρι 2η E. Τότε $Y \sim NB(k=2,\ P(E)=p)$

$$P_Y(y) = \binom{y-1}{k}\, p^k (1-p)^{n-k}, \quad y = k, k+1, \ldots$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α)

$G\begin{pmatrix}\text{μέση τιμή } 5\\ \text{Τυπ. Αποκλ. } 5\end{pmatrix}$

Αν καθίσουν 3 άνθρωποι

$P\begin{pmatrix}\text{να κάθονται και οι 3}\\ \text{αναπαυτικά και να μην}\\ \text{συμπιεσθεί}\end{pmatrix} = \frac{1}{8}$

Ποιο τουλαχ. το ύψος του ελαστικού υλικού?

Εστω x_0 το πάχος του ελαστικού υλικού

Ζητείται $x_0 = ?$

Εστω X το ύψος στο οποίο συμπιέζεται το υλικό. Τότε

$$X \sim G(a,b) \quad E(X) = ab = 5$$

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{ab^2} = 5$$

$\Rightarrow a = 1, \; b = 5$

$$X \sim G(1,5)$$

Έστω $E = \left\{ \begin{matrix} \text{άνθρωπος κάθεται} \\ \text{αναπαυτικά} \end{matrix} \right\} \left(= \{ X \leq X_0 \} \right.$

Έστω Y τ.μ. παριστά πόσοι από τους ~~..~~ τρεις κάθονται αναπαυτικά

$$Y \sim B(n=3,\ p = P(E) = P(X \leq x_0))$$

Γνωρίζω $P(Y=3) = \frac{1}{8}$

$$P(Y=3) = \frac{1}{8} \Rightarrow P_3(3) = \frac{1}{8} \Rightarrow \binom{3}{3} p^3 (1-p)^{3-3} = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = p = P(E) = P(X \leq x_0) = \int_0^{x_0} G(1,5)\,dx = \int_0^{x_0} \frac{1}{5^1 \Gamma(1)} x^{1-1} e^{-x/5}\,dx$$

$$= \int_0^{x_0} \frac{1}{5} e^{-x/5}\,dx = 1 - e^{-x_0/5} \Rightarrow e^{-x_0/5} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = 5 \cdot \ln\frac{1}{2} = \boxed{3,465}$$